QCM - VRAI - FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point quelconque. L'application $t_{\vec{u}} \circ S_A$ est

☐ une translation. ☐ une symétrie centrale. ☐ une symétrie glissante.

2. Un déplacement qui fixe deux points distincts est

☐ une translation de vecteur non nul. ☐ une rotation d'angle non nul. ☐ l'identité.

3. La composée de deux symétries glissantes est

☐ une symétrie glissante. ☐ un déplacement. ☐ Une symétrie orthogonale.

4. Soit D une droite et O un point de D.
L'application $S_D \circ R\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$ est

☐ une symétrie orthogonale. ☐ une rotation. ☐ Une symétrie glissante.

5. Soit A et B deux points distincts.
L'application $S_A \circ S_B$ est

☐ la translation $t_{2\overline{AB}}$. ☐ l'identité. ☐ la translation $t_{2\overline{BA}}$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La composée de trois symétries orthogonales est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante.
2. Un antidéplacement qui fixe un point est une symétrie orthogonale.
3. Soit I et J deux points distincts, f un déplacement qui envoie I sur J et g un antidéplacement qui envoie J sur I. Alors $g \circ f$ est une symétrie glissante.
4. La réciproque d'une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$ est la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $-\vec{u}$.
5. Soit ABCD un carré direct et f le déplacement qui envoie A sur C et B sur D.
Alors f est une translation.

Exercices et problèmes

Dans tous les exercices le plan est orienté dans le sens direct.

1 Soit OAB Un triangle isocèle en O.

Montrer qu'il existe deux isométries qui fixent O et qui envoient A en B.

2 Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I le milieu de [CD].

1.Montrer qu'il existe quatre isométries qui transforment le segment [AD] en le segment [BC].

2.Existe-t-il une isométrie qui transforme le triangle BCO en le triangle ADI ?

3 Soit ABCD un rectangle.

On désigne par S_1, S_2 et S_3 les symétries d'axes respectifs (AD), (AB) et (AC).

1. Donner la nature de l'isométrie $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

2. Construire le point E, image de B par $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

3. Caractériser alors $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

4 On considère un triangle ABC isocèle en A et tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ et on désigne par r la rotation de centre A qui envoie B sur C. Soit D, E et F les images respectives de C, D et E par r.

1. Montrer que F est l'image de B par une rotation r' de centre A, que l'on précisera.

2. Soit G le symétrique de A par rapport à D.

A-t-on $S_{(AC)} \circ S_{(AE)} = S_{(AD)} \circ S_{(AG)}$?

5 Soit A, B, C et D des points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$.

Montrer qu'il existe deux déplacements f et g qui envoient le segment [AB] sur le segment [CD].

2. Définir f et g dans chacun des cas ci-dessous.

a. La droite (CD) est parallèle à la droite (AB).

b. Les droites (CD) et (AB) sont sécantes.

6 On considère deux cercles isométriques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre O et O' se coupant en deux points A et B.

1. Montrer qu'il existe une unique rotation de centre A qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$. Préciser son angle.

2. Soit M' l'image par cette rotation d'un point quelconque M du cercle $\mathscr{C}$. Montrer que les points M, B et M' sont alignés.

7 Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $AB < AC$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre. Soit E le milieu du segment $[BC]$ et P le point du segment $[AC]$ tel que $AB = CP$. La droite (OE) coupe $\mathscr{C}$ en I et J tels que J et A soient sur le même arc orienté BC du cercle $\mathscr{C}$.

1. a. Faire une figure.

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

c. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $MB < MC$.

2. a. Justifier qu'il existe une rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$. Déterminer son angle.

b. Démontrer que le centre de R est un point de $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

c. Quelle est la nature du triangle AIP ?

8 On considère un carré ABCD de sens direct et de centre I tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au carré ABCD.

Soit R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$ et $f = T \circ R$.

1. Déterminer $f(D)$ et $f(A)$.

2. Identifier f.

9 Soit un parallélogramme ABCD.

1. Préciser la nature des transformations ci-dessous.

a. $f = S_{(AB)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CB)}$.

b. $g = S_{(AB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CB)} \circ S_{(CD)}$.

c. $h = S_{(AB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(CB)}$.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de f, g et h lorsque ABCD est un rectangle.

10 Soit un parallélogramme direct ABCD.

On considère le triangle direct IBA rectangle et isocèle en I et les triangles directs ACC' et ADD' rectangles et isocèles en A.

Exercices et problèmes

R_A désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre A et T désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

1. On pose $f = R_A \circ T$.

a. Déterminer $f(B)$. En déduire que f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre I.

b. Montrer que le triangle ICD′ est rectangle isocèle.

2. Soit J le milieu de $[CC']$ et on désigne par R_J la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre J

a. Montrer que $C = R_J(A)$.

b. Que vaut $\left(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{CB}\right)$?

c. Montrer que le triangle BJD′ est rectangle isocèle.

3. Soit $g = R_J \circ f$.

a. Déterminer $g(B)$.

b. Soit K = R_J( ). Montrer que K est le symétrique de I par rapport au milieu A′ de $[BC]$.

11 On considère des triangles équilatéraux directs OAA′, OBB′ et OCC′.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.

On note E, F et G les symétriques respectifs du point O par rapport à I, J et K

1. Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B′ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Identifier $f_1 = r_1 \circ r_2$.

2. a. Evaluer $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OA}\right)$.

b. En déduire que le triangle EB′A est équilatéral.

3. Soit t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{B'O}$.

a. Préciser la nature de $f_2 = t_1 \circ r_1 \circ t_2$.

b. Déterminer $f_2(B')$ puis identifier f_2.

c. Déterminer $f_2(F)$.

Quelle est alors la nature du triangle EFG ?

d. Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.

12 On considère un triangle direct OAB, rectangle et isocèle en O.

On note r_A et r_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\frac{\pi}{2}$ et S_O la symétrie de centre O.

On place un point C, non situé sur la droite (AB) et on construit les carrés directs BEDC et ACFG.

1. a. Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$.

b. Montrer que $S_O = r_A \circ r_B$.

2. a. Déterminer l'image de E par $r_A \circ r_B$.

b. En déduire que O est le milieu du segment $[EG]$.

c. On note r_F et r_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer $r_F \circ S_O \circ r_D(C)$ puis identifier l'isométrie $r_F \circ S_O \circ r_D$.

d. Soit H le symétrique de D par rapport à O

Démontrer que $r_F(H) = D$, en déduire que le triangle FOD est rectangle et isocèle.

13 On considère un triangle ABC tel que AB = AC et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On pose $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

1. a. Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et de g.

2. a. Déterminer la nature de $g \circ f^{-1}$.

b. Chercher l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractériser alors $g \circ f^{-1}$.

c. Soit M un point du plan, n'appartenant pas à la droite (IJ), M_1 est l'image de M par f et M_2 est l'image de M par g.

Montrer que le quadrilatère ACM_2M_1 est un parallélogramme ?

Exercices et problèmes

14 Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit $D=r(C)$ et $E=r^{-1}(B)$.

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$.

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement tel que $f(A)=D$ et $f(C)=A$.

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. Soit $g=f\circ r$.

a. Montrer que g est une translation.

b. Soit $F=g(E)$. Montrer que $f(B)=F$ et en déduire la nature du triangle BIF.

c. Montrer que les points C, A et F sont alignés.

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On note $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=8, b=6j$ et $c=8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. a. Placer les points A, B, C, A', B' et C'.

b. On note a', b', c' les affixes respectives des points A', B' et C'. Déterminer a', b', c'

c. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

2. a. Calculer la distance $OA+OB+OC$.

b. Montrer que $1+j+j^2=0$.

3. Soit M un point du plan d'affixe z.

a. Montrer que $\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj^2+cj\right|=22$.

b. Montrer que $|z+z'+z''|\le|z|+|z'|+|z''|$, pour tous nombres complexes z, z', z''.

c. En déduire une condition sur M pour que la distance $MA+MB+MC$ soit minimale.

16 On considère deux triangles équilatéraux directs ABC et DEF.

On note G et H les points tels que EDBG et CDFH sont des parallélogrammes.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux manières (l'une utilisant les nombres complexes, l'autre utilisant les composées de déplacements) que le triangle AGH est équilatéral.

I/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct, on note a, b, c, d, e, f, g et h les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G et H

1. Montrer que $c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$.

Exprimer $(f-d)$ à l'aide de $(e-d)$.

2. Exprimer g à l'aide de b, d et e.

Exprimer h en fonction de c, d et f.

3. Montrer que $h-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$.

En déduire que le triangle AGH est équilatéral.

II/ On note t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$.

R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $f=t_2\circ R\circ t_1$.

1. a. Justifier que f est une rotation et préciser son angle.

b. Déterminer l'image de B par f et en déduire le centre de la rotation f.

2. Déterminer l'image de G par f et montrer que le triangle AGH est équilatéral.

17 Soit ABCD un carré direct et de centre O du plan. Soit f l'antidéplacement qui transforme A en D et D en C.

1. Montrer que f est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Soit $E=f(C)$.

a. Montrer que DCE est un triangle isocèle, rectangle en C et direct.

b. Construire le point E.

c. Déterminer et construire l'image F du point B par f.

3. Déterminer et caractériser l'application $f\circ S_{(AD)}$.

18 On considère un rectangle ABCD et on désigne par O, I, J et K les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BC]$, $[OB]$ et $[OC]$.

1. a. Déterminer les images respectives des points B et I par $t_{\overrightarrow{IK}} \circ S_{(IK)}$.

b. Déterminer toutes les isométries qui transforment B en O et I en D.

2. Soit Δ la médiatrice du segment $[IC]$.

a. Construire le point E image de B par la symétrie orthogonale S_Δ.

b. Soit L le milieu du segment $[CD]$.

Déterminer l'image de D par la symétrie centrale S_L.

c. En déduire la nature de $S_L \circ t_{\overrightarrow{IK}} \circ S_{(IK)}$.

19 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les expressions analytiques, la nature et les éléments caractéristiques de f dans chacun des cas ci-dessous.

a. $A(1, 2)$ et $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $f = R_{(A,\frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{u}}$.

b. $D : 2x - 3y + 1 = 0$, $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $f = t_{\vec{u}} \circ S_D$.

c. $D_1 : y - 1 = 0$, $D_2 : x - y - 1 = 0$ et $f = S_{D_1} \circ S_{D_2}$.

20 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit r l'application de $P \to P$ qui a tout point $M(x, y)$ associé $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x \end{cases}.$$

1. Montrer que r est une rotation dont on précisera le centre A et une mesure de son angle.

2. Soit $f = r \circ S_{(O,\vec{j})}$. Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

21 Soit l'équation

$$(E) : z^3 - (2 + 4i)z^2 - (9 - 10i)z + 18 + 6i = 0$$

1. a. Vérifier que 3 est une racine de (E).

b. En déduire les deux autres solutions z_1 et z_2 (z_1 étant la racine ayant la partie réelle positive).

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, A, B et C sont trois points d'affixes respectives 3, z_1 et z_2.

a. Montrer que OABC est un parallélogramme.

b. Montrer qu'il existe un unique déplacement f et un unique antidéplacement g transformant O en B et A en C.

2. Identifier f.

3. Soit S la symétrie orthogonale d'axe (OA).

Montrer que $g = f \circ S$.

22 Soit A, B, C et A' quatre points distincts d'un cercle Γ de centre O.

1. Faire une figure et placer les points B' et C' tels que les droites (AB') et $(A'B)$ soient respectivement parallèles aux droites (BC') et $(B'C)$.

2. On note Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les médiatrices respectives des segments $[AB']$, $[CB']$ et $[CA']$. On désigne par S_1, S_2 et S_3 les symétries orthogonales d'axes respectifs Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

a. Montrer que $f = S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est une symétrie orthogonale.

b. Identifier $f \circ f$.

c. Montrer que $S_3(C') = A$ et en déduire que les droites (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

23 On considère un carré ABCD de centre I tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

A/ On désigne par J et K les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[CD]$, par C' le symétrique du point C par rapport à D.

Soit R_D et R_B les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs D et B, S_I la symétrie centrale de centre I et S_K la symétrie centrale de centre K

1. Soit $f = R_D \circ S_I \circ R_B$.

a. Déterminer $f(B)$.

b. Montrer que f est une translation que l'on caractérisera.

2. On pose $g = f \circ S_{(IJ)}$.

a. Déterminer $g(C)$ et $g(D)$.

b. En déduire que g est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

3. a. Montrer que $S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} = f$

b. En déduire que $S_K \circ S_{(IJ)} = S_{(AD)} \circ f$

c. Montrer que $S_{(AD)} \circ f$ est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

B/ Soit Ω le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABD.

On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1. Construire le point A' image de A par r'.
2. Identifier $r' \circ r$.
3. Montrer que les droites $(\Omega A')$ et (AB) sont parallèles.

24 Soit ABC un triangle direct et A' le milieu du segment $[BC]$.

Soit P et Q les deux points définis par $\begin{cases} PA = PC \\ (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} QB = QA \\ (\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QA}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$.

On désigne par Ω le milieu du segment $[PQ]$, I le milieu du segment $[QA']$, J le milieu du segment $[PA']$ et P' le symétrique de P par rapport à A'.

On désigne par R_P et R_Q et les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs P et Q.

On pose $f = R_Q \circ S_{A'} \circ R_P$.

1. a. Déterminer $f(A)$. Caractériser alors f.

b. Montrer que $R_Q(P') = P$.

2. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A') = Q$ et $\varphi(P) = A'$.

b. Caractériser φ.

c. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h = \varphi \circ S_{(A'Q)}$.

3. Soit ψ l'antidéplacement qui envoie A' sur Q et P sur A'.

a. Montrer que $\psi(J) = I$.

b. Montrer que ψ est une symétrie glissante.

c. Déterminer les éléments caractéristiques de ψ.

4. Soit M un point du plan.

On pose $\psi(M) = M_1$ et $\varphi(M) = M_2$.

Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on déterminera.

25 On considère un carré ABCD de centre I tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$. Soit E le point du plan tel que DCE est un triangle équilatéral direct.

On désigne par J, K et L les milieux respectifs des segments $[DC]$, $[AD]$ et $[DE]$ et par O le centre du cercle circonscrit au triangle DCE.

1. On pose $\varphi = R_{\left(D, \frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{(IJ)}$.

a. Déterminer $\varphi(C)$ et $\varphi(D)$.

b. Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques.

2. a. Caractériser l'application $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)}$.

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application $\psi = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(AB)}$.

3. Pour tout point N du plan on considère les points $N_1 = R_{\left(D, \frac{\pi}{3}\right)}(N)$ et $N_2 = R_{\left(O, -\frac{2\pi}{3}\right)}(N)$.

Montrer que le milieu du segment $[N_1N_2]$ est un point fixe que l'on précisera.

4. Soit M_0 un point du plan. On considère la suite des points (M_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(M_n) = M_{n+1}$.

a. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\overrightarrow{M_0M_{2n}} = (2n)\vec{L}$.

b. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, M_{2n} appartient à une droite fixe que l'on précisera.

26 On considère un rectangle ABCD tel que $AB = 2BC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement f du plan tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$.

b. Caractériser f puis en déduire que $f(B) = D$.

2. Déterminer la droite Δ telle que $f = S_{(IJ)} \circ S_{\Delta}$.

3. Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a. Déterminer $r(B)$, $r(C)$ et $r(J)$.

b. Soit M un point de $[CJ]$, la perpendiculaire à (IM) issue de I coupe la perpendiculaire à (BM) issue de J en M'. Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit $[CJ]$?

4. On pose $g = r \circ f$.

a. Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.

b. Déterminer $g(A)$.

c. Déduire la construction du centre de g.

5. a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h tel que $h(A)=C$ et $h(I)=J$.

b. Montrer que h est une symétrie glissante.

c. Montrer que $h(B)=D$.

6. On propose de déterminer les éléments caractéristiques de h en utilisant deux méthodes.

Première méthode

a. Déterminer $h\circ S_{(AB)}(A)$ et $h\circ S_{(AB)}(B)$.

En déduire $h\circ S_{(AB)}$.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de h.

Deuxième méthode

a. On pose $D'=h(D)$.

Montrer que $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CD'}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $CD'=AD$.

En déduire que D' est le symétrique de B par rapport à C.

b. En déduire les éléments caractéristiques de h.

c. Construire le point $C'=h(C)$.

7. Le cercle de diamètre $[AB]$ recoupe $[AC]$ en E.

Le cercle de diamètre $[CD]$ recoupe $[CC']$ en E'.

Soit F le symétrique de E' par rapport à (IJ).

Montrer que (EF) est parallèle à (AD).

27 On considère AFED un carré de coté 4 cm tel que $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et O son centre.

On désigne par B et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF).

1. a. Soit r la rotation définie par $r(F)=E$ et $r(E)=D$. préciser l'angle et le centre de r.

b. Soit $f=r\circ S_{(OO_1)}$ où $S_{(OO_1)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (OO_1). Montrer que f est la symétrie orthogonale d'axe (OE).

2. Soit $r'=t_{\overrightarrow{OO_1}}\circ r^{-1}$ où $t_{\overrightarrow{OO_1}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ et r^{-1} la rotation réciproque de r

a. Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle.

b. Déterminer $r'(O)$. En déduire que F est le centre de r'.

3. On désigne par g l'antidéplacement défini par $g(D)=F$ et $g(O)=O_1$.

a. Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

b. Soit M un point du plan. Montrer que $g(M)=r'(M)$, si et seulement si, $f(M)=M$.

c. En déduire l'ensemble des points M tels que $g(M)=r'(M)$.

28 Soit ABC un triangle tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, O est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC et I est le point d'intersection des bissectrices intérieures de ce triangle. Les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites $[CA)$ et $[BA)$ et vérifient $CP=BQ=BC$.

1. a. Montrer que la droite (CI) est la médiatrice du segment $[PB]$ et que la droite (BI) est la médiatrice du segment $[CQ]$.

b. Montrer que $\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

2. Soit f la rotation qui transforme C en Q et P en B.

a. Montrer que f a pour centre I et pour angle $\frac{2\pi}{3}$.

b. Montrer que $\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

c. Montrer que les points I, P et Q sont alignés.

3. On pose $O_1=f(O)$ et $O_2=f(O_1)$.

a. Montrer que $O=f(O_2)$.

b. En déduire que le triangle OO_1O_2 est équilatéral et que la droite (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $g=f\circ r\circ f$.

a. Montrer que g est une translation.

Vérifier que $g(O_2)=O_1$. En déduire le vecteur de translation.

b. Montrer que $r(B)=C$. En déduire que $g(P)=Q$.

c. Montrer alors que les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires.

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

QCM :

1) $t_{\vec{u}} o S_A$ est une symétrie centrale
2) Un déplacement qui fixe deux points distincts est l'identité
3) La composée de deux symétries glissantes est un déplacement
4) $S_D \circ r_{(0,\frac{\pi}{3})}$: symétrie orthogonale
5) $S_A \circ S_B = t_{2\vec{BA}}$

VRAI ou FAUX :

1) vrai : la composée de trois symétries orthogonale est un antidéplacement
2) vrai : symétrie glissante n'a pas de points invariants
3) faux : $g \circ f(I) = I$ $g \circ f$ est un antidéplacement qui fixe un point $\Rightarrow g \circ f$ est une symétrie orthogonale
4) vrai : $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ $f^{-1} = s_\Delta o t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} o s_\Delta$
5) faux : f(A)=C
   f(B)=D
   $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ f n'est pas une translation f=S_O avec o=A * C

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

EX1 : $\begin{cases} f(o)=o \\ f(A)=B \end{cases}$

f fixe o et $f \neq id$ d'où f soit une symétrie orthogonale d'axe Δ=med[AB] soit une rotation de centre o d'angle $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\ [2\pi]$

EX2 :

1. AD=BC et A≠D d'où il existe un unique déplacement φ tel que $\begin{cases} \varphi(A)=B \\ \varphi(D)=C \end{cases}$ $\varphi = t_{\overrightarrow{AB}}$

De même il existe un unique antidéplacement ψ tel que $\begin{cases} \psi(A)=B \\ \psi(D)=C \end{cases}$ med[AB]≠med[DC]

$\Rightarrow \psi$ n'est pas une symétrie orthogonale

$\Rightarrow \psi$ est une symétrie glissante

De même : il existe un unique déplacement f tel que $\begin{cases} f(A)=C \\ f(D)=B \end{cases}$ f=S_o

Et il existe un unique antidéplacement g tel que $\begin{cases} g(A)=C \\ g(D)=B \end{cases}$ (g : symétrie glissante)

Conclusion : il existe exactement 4 isométries qui transforment le segment [AD] en [BC]

2) le triangle BCO est ADI ne sont pas isométriques (AI≠BC ; AI≠BO et AI≠OC) d'où il n'existe aucune isométrie qui transforme le triangle BCO au triangle ADI

EX3 :

1) $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est un antidéplacement qui fixe le point A donc c'est une symétrie orthogonale d'axe passant par A

2) S_1(B)=B' ; S_2(B')=B' ; S_3(B')=E

3) $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est une symétrie orthogonale et $S_3 \circ S_2 \circ S_1$(B)=E $\Rightarrow S_3 \circ S_2 \circ S_1 = S_\Delta$ avec Δ=med[BE]

EX4 :

$r = r_{(A,\frac{\pi}{12})}$

1) on a : $\begin{cases} AB = AF \\ (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ d'où F=r'(B) r'=$r_{(A,\frac{\pi}{3})}$

2) D=A*G⇒(AD)=(AG)⇒$S_{(AD)}$o $S_{(AG)}$ =Id et $S_{(AC)}$o $S_{(AE)}$ = $R_{(A,-\frac{\pi}{3})}$

⇒ $S_{(AD)}$ o $S_{(AG)}$ ≠ $S_{(AC)}$ o $S_{(AE)}$

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

EX5 :

1) AB=CD et AB≠0 donc il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D
De même : il existe un unique déplacement qui envoie A sur D et B sur C
f et g : les seuls déplacements qui transforment [AB] en [CD]
$(AB)\|(CD)$

2) a) $\begin{cases} f(A)=C \\ f(B)=D \end{cases}$

f est d'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\equiv 0(2\pi) \quad \Rightarrow f=t_{\overrightarrow{AC}}$

$\begin{cases} g(A)=D \\ g(B)=C \end{cases}$ g est un déplacement d'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC}\right)=\pi[2\pi]$

$\Rightarrow$ g est une symétrie centrale, $g=S_I$ avec $I=A*D$

b) $*\begin{cases} f(A)=C \\ f(B)=D \end{cases}$

f est d'angle α tel que $\alpha\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)(2\pi)$

$\Rightarrow$ f est une rotation d'angle α de centre ω avec $\{\omega\}=med[AC]\cap med[BD]$

$*\begin{cases} g(A)=D \\ g(B)=C \end{cases}$

g est d'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})\equiv\alpha+\pi(2\pi)$

$\Rightarrow$ g est une rotation d'angle $(\alpha+\pi)$ de centre Ω avec $\{\Omega\}=med[AD]\cap med[BC]$

EX6 :

1) OA=OA' et OA≠0 d'où il existe un unique déplacement f tel que $\begin{cases} f(O)=O' \\ f(A)=A \end{cases}$

f est un déplacement d'angle $\alpha\equiv(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'}})(2\pi) \quad \Rightarrow \begin{matrix} f=r_{(A,\alpha)} \\ f(\zeta)=\zeta' \end{matrix}$

2)

$\left.\begin{cases} r_{(A,\alpha)}(O)=O' \\ r_{(A,\alpha)}(M)=M' \\ r_{(A,\alpha)}(A)=A \end{cases}\right\} \Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'A}}\right)(2\pi)$ *car r conserve la mesure des angles orientés*

$(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}})+(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM'}})(2\pi)$

$\equiv\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}})+\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'M'}})(\pi)$

$\equiv\frac{1}{2}\left[\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}}\right)-\left(\widehat{\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'A}}\right)\right]\equiv 0(\pi)$ *car* $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'A}}\right)$

d'où les points B,M et M' sont alignés

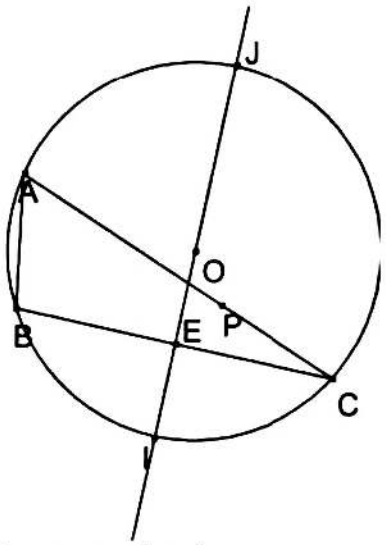
DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

EX7 :

1) a) voir figure

b) l'ensemble des points M du plan vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ est l'arc $\left[\widehat{BC}\right]$ contenant A, privé de B et C

c) l'ensemble des points M du plan vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ et MB<MC est l'arc $\left[\widehat{BJ}\right]$ contenant A, privé de B et J



2) a) on a : AB=PC et AB≠0 d'où il existe un unique déplacement R tel que R(A)=P et R(B)=C $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{PC}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ d'où R est une rotation d'angle $(\frac{\pi}{3})$

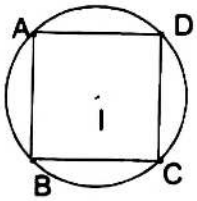
b) soit ω le centre de R . R(B)=C $\Leftrightarrow \begin{cases} \omega B = \omega C \\ (\widehat{\overrightarrow{\omega B},\overrightarrow{\omega C}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ d'où ω=J

$R = r_{(J,\frac{\pi}{3})}$

c) R(A)=P $\Leftrightarrow \begin{cases} JA = JP \\ (\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JP}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ d'où JAP est un triangle équilatéral direct

EX8 : $f = T \circ R$

1) $f(D) = T \circ R(D) = T(D) = A$
$f(A) = T \circ R(A) = T(C) = B$



2) f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (composée d'une translation et une rotation)

soit ω son centre f(D)=A ⇒ ω∈ med[DA]
f(A)=B ⇒ ω∈ med[AB] d'où ω=I et $f = r_{(I,\frac{\pi}{2})}$

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

EX9 :

1) Comme étant composée d'un nombre pair de symétries orthogonales, f, g et h sont des déplacements

2) ABCD rectangle

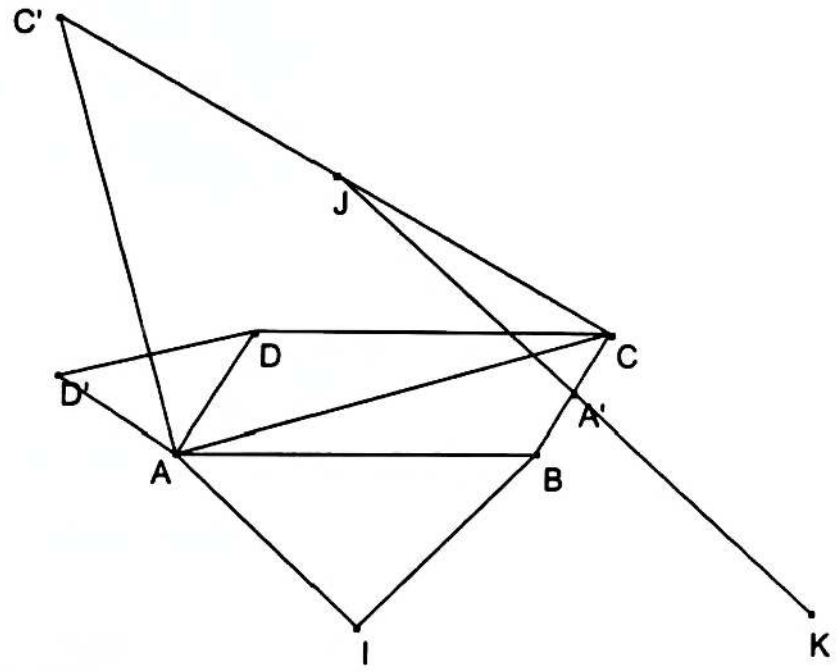
$f=(S_{(AB)}\circ S_{(CD)})\circ(S_{(AD)}\circ S_{(CB)})$ $g=(S_{(AB)}\circ S_{(AD)})\circ(S_{(CB)}\circ S_{(CD)})$ $h=(S_{(AB)}\circ S_{(AD)})\circ(S_{(CD)}\circ S_{(CB)})$

$f=t_{2\overrightarrow{DA}}\circ t_{2\overrightarrow{CD}}$ $g=S_A\circ S_C$ $h=S_A\circ S_C=t_{2\overrightarrow{CA}}$

$f=t_{2(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})}=t_{2\overrightarrow{CA}}$ $g=t_{2\overrightarrow{CA}}=f$ $h=g=f$

EX10 :

$R_A=r_{(A,\frac{\pi}{2})}$ $T=t_{\overrightarrow{BA}}$



1) $f=R_A\circ T$

a) $f(B)=R_A\circ T(B)=R_A(A)=A$ f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (composée d'une translation et d'une rotation) et f(B)=A

D'autre part on a : $\begin{cases}IA=IB\\(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases}$ d'où f est de centre I $f=r_{(I,\frac{\pi}{2})}$

b) $f(C)=R_A\circ T(C)=R_A(D)=D'$ d'où $\begin{cases}IC=ID'\\(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID'}})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases}$

par suite le triangle ICD' est rectangle est isocèle en I.

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

2) J=C * C' ; $R_J = r_{(J,\frac{\pi}{2})}$

a) ACC' est rectangle et isocèle en A et de sens direct J=C * C' d'où $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JC}} \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \\ et \\ JA = JC = JC' \end{cases}$

Par suite $R_J(A)=C$

b)
$$(\widehat{\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{CB}} \equiv (\widehat{\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{DA}})(2\pi) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{AD}}) + \pi(2\pi)$$
$$\equiv \frac{-\pi}{2} + \pi(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$$

c) montrons que $R_J(D') = B$

soit $D'' = R_J(D')$ on a aussi $C = R_J(A)$ d'où $\begin{cases} CD'' = AD' \\ (\widehat{\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{CD''}} \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD'' = AD' = AD = CB \\ (\widehat{\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{CB}}) + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD''}}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD'' = CB \\ \frac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD''}}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD'' = CB \\ (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD''}}) = 0(2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD''} \Rightarrow D'' = B$$

D'où $R_J(D')=B$

$\Rightarrow \begin{cases} JD' = JB \\ (\widehat{\overrightarrow{JD'},\overrightarrow{JB}} \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ est par suite le triangle BJD' est rectangle et isocèle en J

3) $g = R_J \circ f$

a) $g(B) = R_J \circ f(B) = R_J(A) = C$

b) $K = R_J(I)$

$g = r_{(J,\frac{\pi}{2})} \circ r_{(I,\frac{\pi}{2})}$ g est une rotation d'angle π ⇒ g est une symétrie centrale

g(B)=C ⇒ g est de centre A'=B * C Donc $g=S_{A'}$

$g(I) = R_J \circ f(I) = R_J(I) = K$

$\Rightarrow A' = I * K$

$\Rightarrow K' = S_{A'}(I)$

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

EX11 :

1)

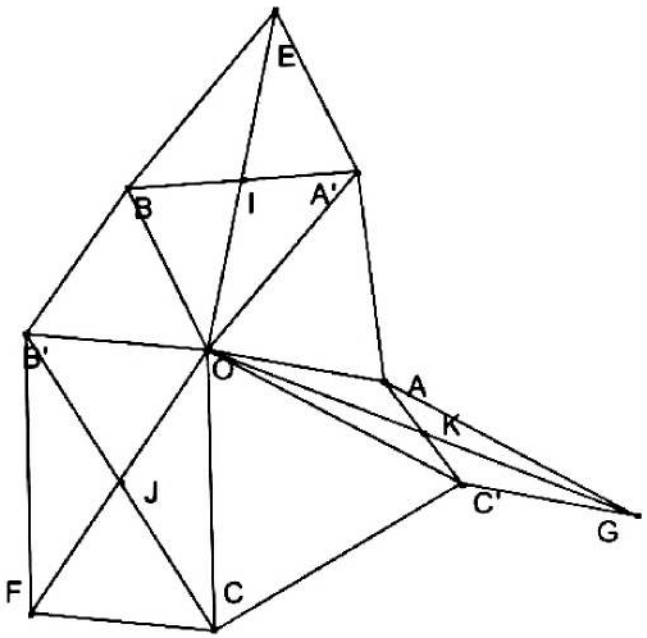
$r_1 = r_{(o,\frac{\pi}{3})}$

$r_2 = r_{(B',\frac{-\pi}{3})}$ $\quad f_1 = r_1 \circ r_2$ f1 est un

déplacement d'angle $(\frac{\pi}{3}+(\frac{-\pi}{3})) \equiv 0(2\pi)$

Donc f_1 une translation

$f_1(B) = r_1 \circ r_2(B) = r_1(O) = O$ d'où $f_1 = t_{\overrightarrow{BO}}$



2) a) $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{OA}) \equiv (\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OA})(2\pi) \equiv \frac{-\pi}{3}(2\pi)$

(car OBEA' est un parallélogramme)

b)

$r_1 \circ r_2 = t_{\overrightarrow{BO}}$

$\Rightarrow r_2 = r_1^{-1} \circ t_{\overrightarrow{BO}}$

$\Rightarrow r_2 = r_{(O,\frac{-\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{BO}}$

$r_2(E) = r_{(O,\frac{-\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{BO}}(E) = r_{(O,\frac{-\pi}{3})}(A') = A$

$$\Rightarrow \begin{cases} B'E = B'A \\ (\overrightarrow{B'E},\overrightarrow{B'A}) \equiv \frac{-\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$$

D'où le triangle EB'A est équilatéral direct

3) $t_1 = t_{\overrightarrow{OA}}$

$t_2 = t_{\overrightarrow{B'O}}$

a) $f_2 = t_1 \circ (r_1 \circ t_2)$ $r_1 \circ t_2$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ d'où f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

b) $f_2(B') = t_1 \circ r_1 \circ t_2(B') = t_1 \circ r_1(O) = t_1(O) = A$

on a : $\begin{cases} EB' = EA \\ (\overrightarrow{EB'},\overrightarrow{EA}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ d'où f_2 est de centre E Donc $f_2 = r_{(E,\frac{\pi}{3})}$

c) $f_2(F) = t_1 \circ r_1 \circ t_2(F) = t_1 \circ r_1(C) = t_1(C') = G$ car OB'FC et OC'GA sont des parallélogrammes

$$f_2(F) = G \Leftrightarrow r_{(E,\frac{\pi}{3})}(F) = G \Leftrightarrow \begin{cases} EF = FG \\ (\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$$ par suite EFG est un triangle équilatéral direct

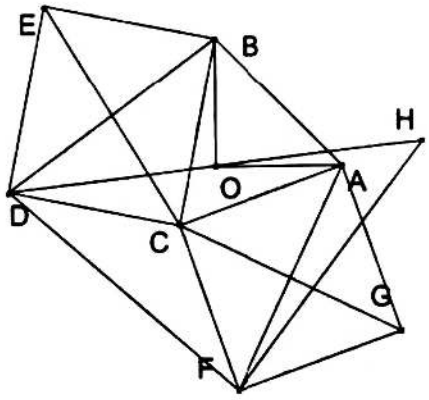
d) on a : EF=FG=GE

$\left.\begin{matrix} I = O * E \\ J = O * F \end{matrix}\right\} \Rightarrow IJ = \frac{1}{2}EF$ de même $JK = \frac{1}{2}FG$ et $IK = \frac{1}{2}GE$ d'où IJ=IK=JK par suite le triangle IJK est équilatéral

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

EX12 :

1) $r_A = r_{(A,\frac{\pi}{2})}$ $r_B = r_{(B,\frac{\pi}{2})}$



a) $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ est la rotation de centre A

d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ d'où

$S_{(AO)} \circ S_{(AB)} = r_A$

b) $r_A = S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ et $r_B = S_{(BA)} \circ S_{(BO)}$

$\Rightarrow r_A \circ r_B = S_{(AO)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BO)} = S_{(AO)} \circ S_{(BO)} = S_O$

car (AO)⊥ (BO)

2) a) $r_A \circ r_B(E) = r_A(C) = G$

b)

$r_A \circ r_B(E) = G$

$\Rightarrow S_O(E) = G$

$\Rightarrow O = E * G$

c) $r_F = r_{(F,\frac{\pi}{2})}$

$r_D = r_{(D,\frac{\pi}{2})}$

$r_F \circ s_O \circ r_D(C) = r_F \circ s_O(E) = r_F(G) = C$

$r_F \circ s_O$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2} + \pi \equiv \frac{3\pi}{2}(2\pi)$ d'où $r_F \circ s_O \circ r_D$ est une translation

$\left[\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv 0(2\pi)\right]$ qui fixe le point C d'où $r_F \circ s_O \circ r_D = id_p$

d) $O = D * H \Rightarrow S_O(D) = H$ et $r_F \circ s_O \circ r_D = id_p \Rightarrow r_F \circ s_O \circ r_D(D) = D$

$r_F \circ s_O \circ r_D(D) = D \Rightarrow r_F \circ s_O(D) = D \Rightarrow r_F(H) = D \Rightarrow \begin{cases} FD = FH \\ (\widehat{\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

D'où le triangle DFH est un triangle rectangle et isocèle en F $O = D * H \Rightarrow OD = OF = OH$

Et (OF)⊥(DO) par suite ODF est rectangle et isocèle en O

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

EX13 :

$R = r_{(I,\frac{\pi}{2})}$

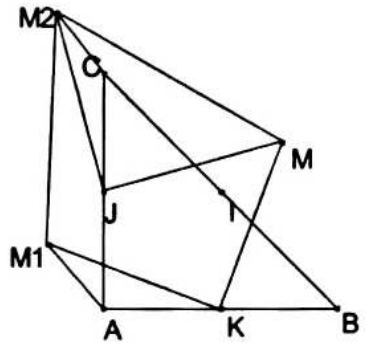
$T = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

$f = R \circ T$

$g = T \circ R$

1) a) f(K)=R ∘ T(K)=R(J)=K

g(J)=T ∘ R(J)=T(K)=J



b) f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (composée d'une translation et dune rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$)

f(K)=K d'où $f = r_{(K,\frac{\pi}{2})}$

g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et g(J)=J d'où $g = r_{(J,\frac{\pi}{2})}$

2) a) $g \circ f^{-1} = r_{(J,\frac{\pi}{2})} \circ r_{(K,\frac{-\pi}{2})}$ et $(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{2} \equiv 0(2\pi))$ D'où $g \circ f^{-1}$ est une translation

b) $g \circ f^{-1}(A) = g(I) = C$ d'où $g \circ f^{-1} = t_{\overrightarrow{AC}}$

c) g(M)=M_2 f(M)=M_1

$g \circ f^{-1}(M_1) = g(M) = M_2$

$\Rightarrow t_{\overrightarrow{AC}}(M_1) = M_2$ d'où ACM_2M_1 est un parallélogramme

$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$

EX14 :

$r(C) = D$

$r^{-1}(B) = E$

1) a) $r_{(A,\frac{\pi}{2})}(C) = D$ AC=DA et AC≠0 d'où

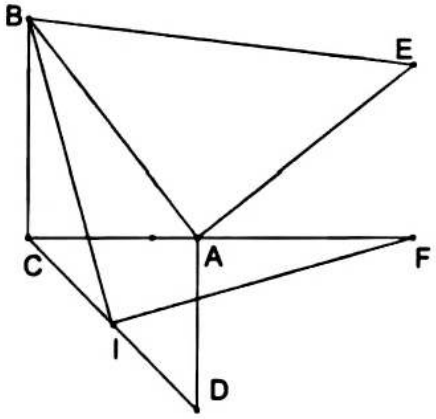
il existe un unique déplacement f tel que

f(A)=D et f(C)=A

b) f est un déplacement d'angle

$(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) + \pi(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi(2\pi) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi)$

d'où f est une rotation d'angle $(\frac{-\pi}{2})$



soit ω son centre

f(A)=D $\Rightarrow \omega \in med[AD]$

f(C)=A $\Rightarrow \omega \in med[AC]$ d'où ω=I et

$f = r_{(I,\frac{-\pi}{2})}$

2) $g = f \circ r$

a) $g = r_{(I,\frac{-\pi}{2})} \circ r_{(A,\frac{\pi}{2})}$ $(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv 0(2\pi))$ d'où g est une translation

et comme g(A)=D $\Rightarrow g = t_{\overrightarrow{AD}}$

b) $g(E) = F \Rightarrow f \circ r(E) = F \Rightarrow f(B) = F$

$* f(B) = F \Leftrightarrow \begin{cases} IF = IB \\ (\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IF}}) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ d'où BIF est isocèle et rectangle en I

c) $\left.\begin{matrix} f(C) = A \\ f(B) = F \end{matrix}\right\} \Rightarrow (AF) \perp (BC)$ (1) car f est une rotation d'angle $(\frac{-\pi}{2})$

or (AC)⊥(BC) (2)

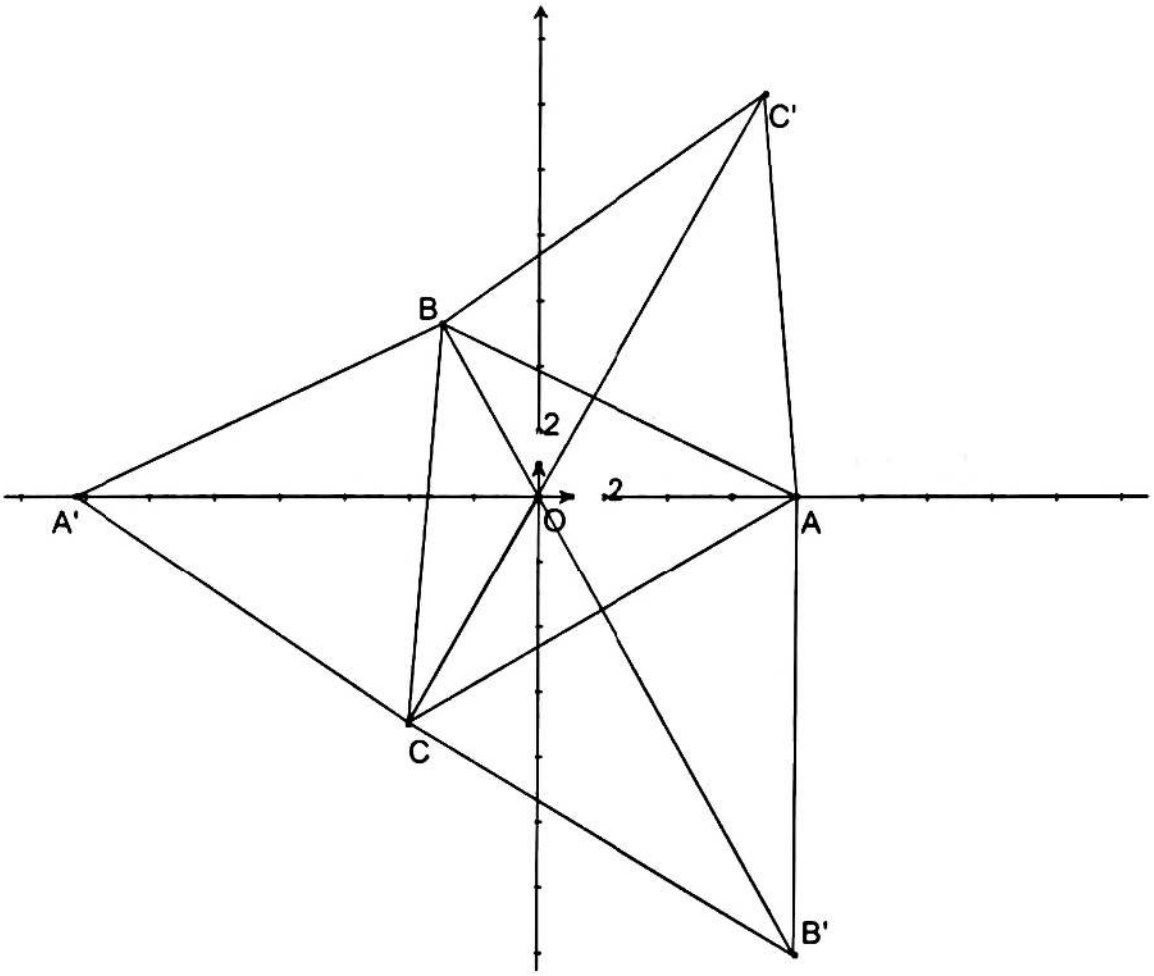
(1)−(2) $\Rightarrow (AF) \| (AC)$ par suite A,C et F sont alignés

EX15 :

$a = 8$

1) a) $b = 6e^{2i\frac{\pi}{3}}$

$c = 8e^{4i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-2i\frac{\pi}{3}}$



b) $A'=r_{(C,\frac{\pi}{3})}(B)\Leftrightarrow\begin{cases}CA'=CB\\(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA'}})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|a'-c|=|b-c|\\Ag(\frac{a'-c}{b-c})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\frac{a'-c}{b-c}\right|=1\\Ag(\frac{a'-c}{b-c})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a'-c}{b-c}=e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow a'-c=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)$$

$$\Leftrightarrow a'=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)+c\Leftrightarrow a'=e^{i\frac{\pi}{3}}(6e^{2i\frac{\pi}{3}}-8e^{-2i\frac{\pi}{3}})+8e^{-2i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow a'=e^{i\pi}-8e^{-i\frac{\pi}{3}}+8e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a'=-6+8(e^{-2i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}})=-6+8[\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}]=-14$$

De même :

$$*r_{(A,\frac{\pi}{3})}(C)=B'$$

$$\Rightarrow b'=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)+a$$

$$\Rightarrow b'=e^{i\frac{\pi}{3}}(8e^{-2i\frac{\pi}{3}}-8)+8$$

$$\Rightarrow b'=8(1-i\sqrt{3})$$

$$*r_{(B,\frac{\pi}{3})}(A)=C'$$

$$\Rightarrow C'=e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b)+b$$

$$\Rightarrow C'=7(1+i\sqrt{3})$$

c) $*\ \frac{c'}{c}=\frac{7(1+i\sqrt{3})}{8e^{-2i\frac{\pi}{3}}}=\frac{14e^{i\frac{\pi}{3}}}{8e^{-2i\frac{\pi}{3}}}=\frac{7}{4}e^{i\pi}=\frac{-7}{4}\Rightarrow\frac{c'}{c}\in\mathbb{R}\Rightarrow$ O,C et C' alignés

$*\ \frac{a'}{a}=\frac{-14}{8}\in\mathbb{R}\Rightarrow$ O,A et A' alignés

$*\ \frac{b'}{b}=\frac{8(1-i\sqrt{3})}{6e^{2i\frac{\pi}{3}}}=\frac{16e^{-i\frac{\pi}{3}}}{6e^{2i\frac{\pi}{3}}}=\frac{8}{3}e^{-i\pi}=\frac{-8}{3}\in\mathbb{R}\Rightarrow$ O,B et B' alignés

D'où (AA'),(BB') et (CC') sont concourantes en O

2) a) OA+OB+OC=$|a|+|b|+|c|=8+6+8=22$

b) $1+J+J^2=1+e^{2i\frac{\pi}{3}}+e^{4i\frac{\pi}{3}}=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

3) a)

$$|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|=|(a+bj^2+cj)-\underbrace{(1+j+j^2)}_{0}z|=|a+bj^2+cj|$$

$$=|8+6e^{2i\frac{\pi}{3}}e^{4i\frac{\pi}{3}}+8e^{-2i\frac{\pi}{3}}e^{2i\frac{\pi}{3}}|=|8+6e^{2i\pi}+8e^{2i0}|=|8+6+8|=22$$

b) $|Z_1+Z_2|\le|Z_1|+|Z_2|$ (cours) $\Rightarrow|z+z'+z''|\le|z|+|z'|+|z''|$

c) $\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|\le|a-z|+|b-z||j|^2+|c-z||j|$

$\Rightarrow 22\le|a-z|+|b-z|+|c-z|\Rightarrow 22\le MA+MB+MC$ or OA+OB+OC=22

D'où MA+MB+MC est minimale pour M=O

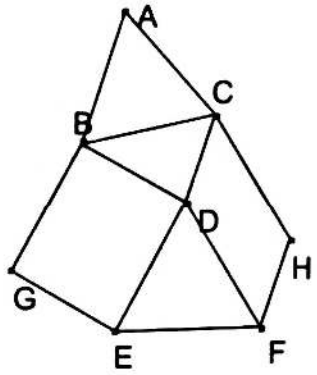
EX16 :

I/ 1) ABC équilatéral direct d'où

$$r_{(A,\frac{\pi}{3})}(B)=C\Rightarrow\begin{cases}AC=AB\\(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1\\Ag(\frac{c-a}{b-a})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

* de même : $r_{(D,\frac{\pi}{3})}(E)=F\Rightarrow f-d=e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$



2) EDBG est un parallélogramme $\Rightarrow\overline{BG}=\overline{DE}\Rightarrow g-b=e-d\Rightarrow g=e-d+b$

De même : $\Rightarrow\overline{CH}=\overline{DF}\Rightarrow h-c=f-d\Rightarrow h=f-d+c$

3) h-a=(f-d)+(c-a)

$$h-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)+e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)=e^{i\frac{\pi}{3}}\left[(e-d+b)-a\right]$$

$$h-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$$

$$\frac{h-a}{g-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left|\frac{h-a}{g-a}\right|=1\\Ag(\frac{h-a}{g-a})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|h-a|=|g-a|\\Ag(\frac{h-a}{g-a})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AH=AG\\(\widehat{\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AH}})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\end{cases}$$

D'où le triangle AGH est équilatéral direct

II/

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

1) a) $t_2 \circ R$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ (th du cours) d'où f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

b) $f(B) = t_2 \circ R \circ t_1(B) = t_2 \circ R(D) = t_2(D) = C$

Or on a : $\begin{cases} AB = AC \\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ d'où f est une rotation de centre A $\Rightarrow f = r_{(A,\frac{\pi}{3})}$

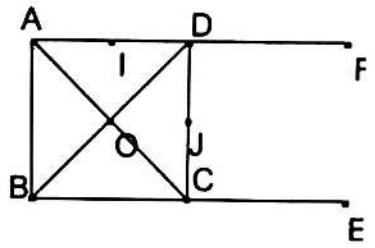
2) $f(G) = t_2 \circ R \circ t_1(G) = t_2 \circ R(E) = t_2(F) = H$ D'où $\begin{cases} AG = AH \\ (\widehat{\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ par suite AGH est Équilatéral direct

EX17 :

1) $\begin{cases} f(A) = D \\ f(D) = C \end{cases}$

$f \circ f(A) = f(D) = C \neq A$

$\Rightarrow f \circ f \neq id$



d'où f n'est pas une symétrie orthogonale
par suite f est une symétrie glissante

* soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

$f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$

$f \circ f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$

$f \circ f(A) = C \Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}$

$f(A) = D \Rightarrow A * D \in \Delta$

$f(D) = C \Rightarrow D * C \in \Delta$

D'où Δ=(IJ) avec I=A * D et J=D * C

2) E=f(C)

a) C=f(D) $\Rightarrow E = f \circ f(D) \Rightarrow E = t_{\overrightarrow{AC}}(D) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$ d'où ACED est un parallélogramme

$\Rightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ d'où CE=CD et $(\widehat{\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ par suite DCE est un triangle isocèle rectangle en C et direct.

b) $E = S_C(B)$

c) F=f(B)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(D)f(C)} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CE} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow D = A * F \Rightarrow F = S_D(A)$

3) $f \circ S_{(AD)}$ est un déplacement (composée de 2 anti-déplacements)

$f \circ S_{(AD)}(A) = f(A) = D$

$f \circ S_{(AD)}(D) = f(D) = C$

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

$f \circ S_{(AD)}$ est un déplacement d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) + \pi(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi(2\pi) = \frac{-\pi}{2}(2\pi)$

D'où $f \circ S_{(AD)}$ est une rotation d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

On a : $f \circ S_{(AD)}(A)=D$ et $\begin{cases} OA = OD \\ (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ d'où $f \circ S_{(AD)} = r_{(O,\frac{-\pi}{2})}$

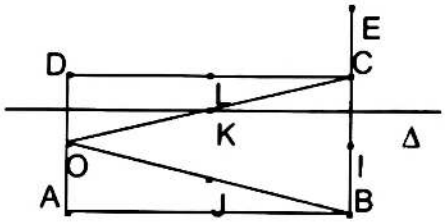
EX18 :

1) a) $t_{\overrightarrow{JK}} \circ S_{(JK)}(B) = t_{\overrightarrow{JK}}(A) = O$

$t_{\overrightarrow{JK}} \circ S_{(JK)}(I) = t_{\overrightarrow{JK}}(O) = D$

c) BI=OD et BI ≠ 0 d'où il existe un unique antidéplacement f qui transforme B en O et I en D

alors d'après a) $f = t_{\overrightarrow{JK}} \circ S_{(JK)}$ donc symétrie glissante



* de même : il existe un unique déplacement g tel que g(B)=O et g(I)=D

$(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{OD}}) \equiv 0(2\pi) \Rightarrow$ g est une translation g(B)=O $\Rightarrow g = t_{\overrightarrow{BO}}$

2) Δ=med[IC] ; k∈Δ

a) voir figure

b) $L = C * D$ donc $S_L(D) = C$

c) 1ére méthode $S_L \circ (t_{\overrightarrow{JK}} \circ S_{(JK)})(I) = S_L(D) = C$

$S_L \circ (t_{\overrightarrow{JK}} \circ S_{(JK)})(B) = S_L(O) = E$ (car OCED est un paralélllogramme)

Or $S_\Delta(I)=C$ et $S_\Delta(B)=E$

Deux antidéplacements qui coïncident en deux points distincts sont égaux d'où

$S_L \circ t_{\overrightarrow{JK}} \circ S_{(JK)} = S_\Delta$

2éme méthode : on a :

$S_L = S_{(JK)} \circ S_{(DC)}$

$t_{\overrightarrow{JK}} = S_{(DC)} \circ S_\Delta$

D'où :

$$S_L \circ t_{\overrightarrow{JK}} \circ S_{(JK)} = S_{(JK)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(JK)} = (S_{(JK)} \circ S_{(\Delta)}) \circ S_{(JK)}$$

$$= S_{(\Delta)} \circ S_{(JK)} \circ S_{(JK)} \quad car \Delta \perp (JK)$$

$$= S_{(\Delta)}$$

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

EX19 :

a) A(1,2) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$*t_{\vec{u}} : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

tq $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=1 \\ y'-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y-1 \end{cases}$

$*R_{(A,\frac{\pi}{3})} : M(z) \mapsto M'(z')$ (voir ex16)

tq $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_A)+z_A$

En posant z=x+iy et z'=x'+iy' on aura $z' = \frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y+1+1\sqrt{3}) + \frac{1}{2}i(\sqrt{3}x+y+2-\sqrt{3})$

D'où l'expression analytique de $R_{(A,\frac{\pi}{3})}$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y+1+2\sqrt{3}) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y+2-\sqrt{3}) \end{cases}$$

$f = R_{(A,\frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{u}}$

$M(x,y) \xrightarrow{t_{\vec{u}}} M_1(x_1,y_1) \xrightarrow{R_{(A,\frac{\pi}{3})}} M'(x',y')$

On aura :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}((x+1)-\sqrt{3}(y-1)+1+2\sqrt{3}) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}(x+1)+(y-1)+2-\sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y+2+3\sqrt{3}) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y+1) \end{cases}$$ (expression analytique de f)

$f = R_{(A,\frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{u}}$, f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre ω :le point invariant par f

$$f(\omega)=\omega \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y+2+3\sqrt{3}) \\ y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{3}y = 2+3\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \\ y = \frac{1}{2}(5+\sqrt{3}) \end{cases}$$

D'où $\omega(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}), \frac{1}{2}(5+\sqrt{3}))$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

D : 2x-3y+1=o

$f = t_{\vec{u}} \circ S_D$

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

Déterminons l'expression analytique de S_D

$S_D : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

tq $: \begin{cases} M * M' \in D \\ \overline{MM'} \perp \vec{v} \end{cases}$ avec: $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$: *vecteur directeur de D*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(\frac{x+x'}{2}) - 3(\frac{y+y'}{2}) + 1 = 0 \\ 3(x'-x) + 2(y'-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' - 3y' = -2x + 3y - 2 \\ 3x' + 2y' = 3x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x + 12y - 4) \\ y' = \frac{1}{13}(12x - 5y + 6) \end{cases}$$

* $t_{\vec{u}}$: $M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

tq $: \begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y+1 \end{cases}$

d'où $f = t_{\vec{u}} \circ S_D$

f : $M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

$$\text{tq} : \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x + 12y - 4) + 1 \\ y' = \frac{1}{13}(12x - 5y + 6) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x + 12y + 9) \\ y' = \frac{1}{13}(12x - 5y + 19) \end{cases}$$

Caractérisons f :

Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x + 12y + 9) \\ y' = \frac{1}{13}(12x - 5y + 19) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 12y = 9 \\ 12x - 18y = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x - 36y = 27 \\ 24x - 36y = -38 \end{cases}$$ impossible

f est un antidéplacement qui n'a pas de points invariants d'où f est une symétrie glissante soit $\vec{\omega}$ son vecteur et Δ son axe.

$$f \circ f : M(x,y) \mapsto M'(x',y') \quad \text{tq} : \begin{cases} x' = x + \frac{30}{13} \\ y' = y + \frac{20}{13} \end{cases} \Rightarrow \overline{MM'}\begin{pmatrix}\frac{30}{13}\\ \frac{10}{13}\end{pmatrix}$$

$$f \circ f = t_{2\vec{\omega}} \Rightarrow \vec{\omega}\begin{pmatrix}15/13\\ 10/13\end{pmatrix}$$

* $\Delta = \{M \in P / \overline{MM'} = \vec{\omega}\}$

$$\overline{MM'} = \vec{\omega} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{13}(5x + 12y + 9) - x = \frac{15}{13} \\ \frac{1}{13}(12x - 5y + 19) - y = \frac{10}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y - 6 = 0 \\ 12x - 18y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4x - 6y + 3 = 0$$

d'où Δ a pour équation 4x-6y+3=0

c) $D_1 : y = 1 \qquad D_2 : y = x - 1 \qquad D_1 \cap D_2 = \{A(2,1)\}$

$$f = S_{D_1} \circ S_{D_2} = r_{(A, \frac{-\pi}{2})}$$

EX20 :

$r : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

tq : $\begin{cases} x' = 1-y \\ y' = x \end{cases}$

1) montrons que r est une isométrie

$M_1(x_1,y_1)$ $r(M_1)= M'_1(x_1',y_1')$

$M_2(x_2,y_2)$ $r(M_2')= M'_2(x_2',y_2')$

$$M_1'M_2' = \sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2} = \sqrt{(1-y_2-1+y_1)^2+(x_2-x_1)^2} = \sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} = M_1M_2$$

D'où r est une isométrie

* déterminons l'ensemble des points invariants par r

$$r(M)=M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-y \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$ d'où r laisse le point $I(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ comme unique

point invariant. $\Rightarrow$ r est une rotation de centre I

$r : M(z) \mapsto M'(z')$

tq :z'=x'+iy'=1-y+ix=i(x+iy)+1

$$\Leftrightarrow z'=iz+1 \Leftrightarrow z'-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)=i\left[z-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)\right] \Leftrightarrow z'-z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_1) \Leftrightarrow \frac{z'-z_1}{z-z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-z_1}{z-z_1}\right| = 1 \\ Ag(\frac{z'-z_1}{z-z_1}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM \\ (\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases} \quad pour \ M \neq I$$

d'où r=R(I,$\frac{\pi}{2}$)

$f : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

2) $S_{(O,\vec{j})} : M(x,y) \mapsto M'(-x,y)$ D'où : tq : $\begin{cases} x'=1-y \\ y'=-x \end{cases}$

$$f(M)=M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-y \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x+y = 0 \end{cases}$$ impossible

$f = r \circ S_{(O,\vec{j})}$ est un antidéplacement qui n'a pas de points invariants

D'où f est une symétrie glissante soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

$f \circ f = t_{2\vec{u}}$

$M(x,y) \xrightarrow{f} M_1(1-y,-x) \xrightarrow{f} M'(1+x,y-1)$

$f \circ f : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$ tq $: \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y-1 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} \overline{MM'}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\ f \circ f = t_{2\vec{u}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

$*\Delta = \left\{ M \in P / \overline{MM'} = \vec{u} \right\}$

$$\overline{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = \frac{1}{2} \\ y'-y = \frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-y-x = \frac{1}{2} \\ -x-y = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\frac{1}{2}=0 \\ -x-y=\frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x+y-\frac{1}{2}=0$$

$d'où \quad \Delta: x+y-\frac{1}{2}=0$

EX21 :

E : P(Z)=0 avec $P(z)=z^3-(2+4i)z^2-(9-10i)z+18+6i$

1) a) P(3)=0

b) $P(z)=(z-3)(z^2+bz+c)=z^3+(b-3)z^2+(c-3b)z-3c$

identifions : $\begin{cases} b-3=-2-4i \\ c-3b=-9+10i \\ -3c=18+6i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1-4i \\ c=-6-2i \end{cases}$

d'où $P(z)=(z-3)[z^2+(1-4i)z-6-2i]$

$$P(z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ ou \\ z^2+(1-4i)z-6-2i \end{cases}$$

$\Delta = 9 \rightarrow \delta = 3$

$z_1 = 1+2i$

$z_2 = -2+2i$

$S_{\mathbb{C}} = \{3, z_1, z_2\}$

2) a) $z_A=3$ $z_B=1+2i$ $z_C=-2+2i$

$aff(\overrightarrow{OA}) = z_A = 3$

$aff(\overrightarrow{CB}) = z_B - z_C = 3$

D'où $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$

Par suite OABC est un parallélogramme

b) OA=BC et OA≠0

D'où il existe un unique déplacement f et un unique antidéplacement g tel que :

$$\begin{cases} f(O) = g(O) = B \\ f(A) = g(A) = C \end{cases}$$

d) f est un déplacement d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \pi(2\pi)$

⇒ f est une rotation d'angle π

⇒ f est une symétrie centrale de centre I=O * B

$z_I = \frac{1}{2} + i$

3) f∘S(O)=f(O)=B

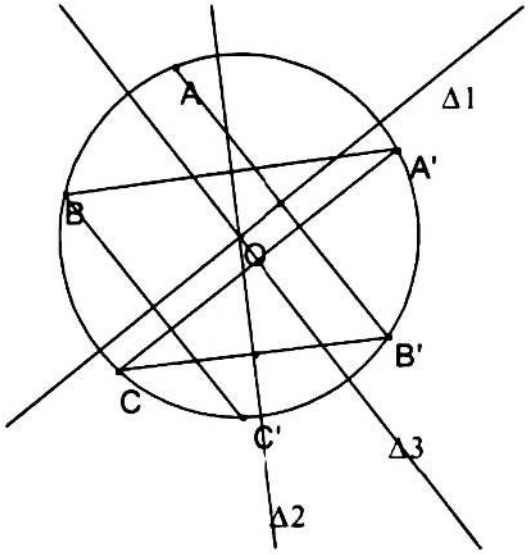
f∘S(A)=f(A)=C

f∘S et g sont deux antidéplacements qui coïncident sur deux points distincts

⇒ g=f∘S

EX22 :

1)



2) a) f=S₃∘S₂∘S₁

Comme étant composée de trois symétries orthogonales f est un antidéplacement

$O \in \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3$ f(O)=O

f fixe le point O d'où f est une symétrie orthogonale d'axe passant par O.

b) $f \circ f = id$ $(S_\Delta \circ S_\Delta = id)$

c) $f \circ f = id$ ⇒ f=f⁻¹

f=S₃∘S₂∘S₁ ⇒ f⁻¹= S₁∘S₂∘S₃

f(A)= S₃∘S₂∘S₁(A)=S₃∘S₂(B')=S₃(C)=A' (erreur dans l'énoncé)

f(C)= f⁻¹(C)= S₁∘S₂∘S₃(A')=S₁∘S₂(B)=S₁(B)=C'

f est une symétrie orthogonale tq : f(A)=A' et f(C)=C' d'où (AA')∥(CC')

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

EX23 :

A/

$R_D = r_{(D,\frac{\pi}{2})}$ $R_B = r_{(B,\frac{\pi}{2})}$

1) $f = R_D \circ S_I \circ R_B$

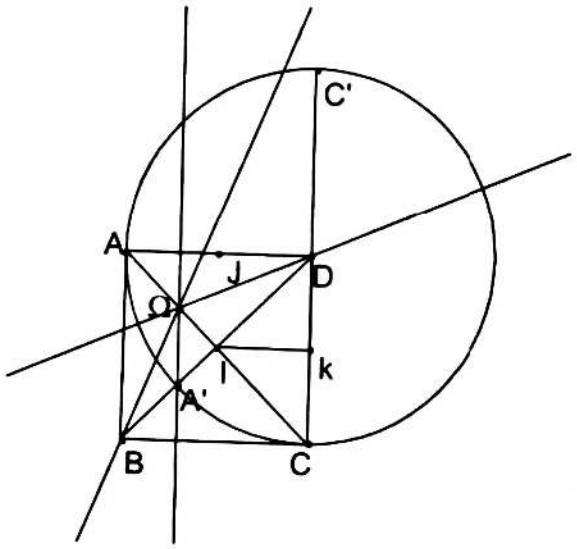
a)

$f(B) = R_D \circ S_I \circ R_B(B) = R_D \circ S_I(B) = R_D(D) = D$

b) $f = r_{(D,\frac{\pi}{2})} \circ (r_{(I,\pi)} \circ r_{(B,\frac{\pi}{2})})$

$r_{(I,\pi)} \circ r_{(B,\frac{\pi}{2})}$ est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \equiv 0(2\pi)$ d'où f est une translation



Et comme f(B)=D $\Rightarrow f = t_{\vec{BD}}$

2) $g = f \circ S_{(IJ)}$

a) $g(C) = f \circ S_{(IJ)}(C) = f(B) = D$ $g(D) = f \circ S_{(IJ)}(D) = f(A) = C'$

b) g est un antidéplacement (composé d'un déplacement et antidéplacement)

$g \circ g(C) = g(D) = C'$ donc $g \circ g \neq id \Rightarrow$ g n'est pas une symétrie orthogonale

d'où g est une symétrie glissante soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

$g \circ g = t_{2\vec{u}}$

$g \circ g(D) = C'$

$\Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{DC'}$

$\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{CK}$

$*g(C) = D \Rightarrow K = C * D \in \Delta$

$*g(D) = C' \Rightarrow D * C' \in \Delta$

D'où Δ=(DC)

3) a) $S_{(AD)} \circ S_{(CD)} = S_D$ car (AD) $\perp$ (CD) ; $S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} = S_I$ car (IK) $\perp$ (IJ)

D'où $S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} = S_D \circ S_I = t_{2\vec{ID}} = t_{\vec{BD}} = f$

b) $S_{(CD)} \circ S_{(IK)} = S_K$ car $(CD) \perp (IK)$ d'où $f = S_{(AD)} \circ S_K \circ S_{(IJ)} \Rightarrow S_{(AD)} \circ f = S_K \circ S_{(IJ)}$

c) $\Rightarrow S_{(AD)} \circ f = S_{(AD)} \circ t_{\vec{BD}} = S_{(AD)} \circ t_{\vec{BA}+\vec{AD}} = S_{(AD)} \circ t_{\vec{BA}} \circ t_{\vec{AD}} = S_{(AD)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(IK)} \circ t_{\vec{AD}} = S_{(IK)} \circ t_{\vec{AD}}$

$\vec{AD}$: vecteur directeur de (IK) d'où $S_{(AD)} \circ f$ est la symétrie glissante d'axe (IK) et de vecteur $\vec{AD}$

B/ 1) $A' = r_{(D,\frac{\pi}{4})}(A) \Rightarrow \begin{cases} DA' = DA \\ (\widehat{\vec{DA}, \vec{DA'}}) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

2) $r'\circ r$ est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$; $r'\circ r(A)=r'(A)=A'$

$r'\circ r(B)=r'(D)=D$

Soit ω le centre de $r'\circ r$ $\omega\in med[BD]\Rightarrow\omega\in(AC)$

$\omega\in med[AA']\Rightarrow\omega\in(A\Omega)$

Car DAA' est isocèle en D et Ω∈ bissectrice intérieure de $\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DA'}\right]$

D'où ω=Ω

Conclusion : $r'\circ r=r_{(\Omega,\frac{3\pi}{4})}$

3) $r'\circ r(A)=A'$

$\Rightarrow(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'}})\equiv\frac{3\pi}{4}(2\pi)$

$\Omega\in[AC]$

$(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{BA}})\equiv(\widehat{A\Omega,AB})(2\pi)\equiv\frac{-\pi}{4}(2\pi)$

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Omega A'}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Omega A}})+(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}})+\pi+\frac{3\pi}{4}(2\pi)\equiv\frac{\pi}{4}+\pi+\frac{3\pi}{4}(2\pi)\equiv 0(2\pi)$

D'où (ΩA')//(AB)

EX 24 :

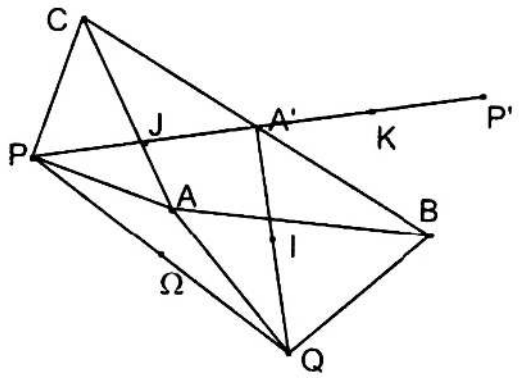
$F=R_Q\circ S_{A'}\circ R_P$

1) a) $f(A)=R_Q\circ S_{A'}\circ R_P(A)$

$=R_Q\circ S_{A'}(c)$

$=R_Q(B)$

$=A$



$F=r_{(Q,\frac{\pi}{2})}\circ r_{(A',\pi)}\circ r_{(P,\frac{\pi}{2})}$

$\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{\pi}{2}\equiv 0(2\pi)$ D'où f est une translations et comme f(A)=A alors $f=id_P$

b) f(P)=P

$\Rightarrow R_Q\circ S_{A'}\circ R_P(P)=P$

$\Rightarrow R_Q\circ S_{A'}(P)=P$

$\Rightarrow R_Q(P')=P$

2) a/ $R_Q(P')=P\Rightarrow\begin{cases}QP=QP'\\(\widehat{\overrightarrow{QP'},\overrightarrow{QP}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

$\Rightarrow$ Q P P' est un triangle rectangle et isocèle en Q

et comme A' =P*P' alors A' P =A' P' =A' Q

On a : A' P=Q A' et A'P≠0 D'où il existe un unique déplacement φ tels que :

$\varphi(A')=Q$ et $\varphi(P)=A'$

b/ φ *est un déplacement d'angle* $(\widehat{\overrightarrow{A'p},\overrightarrow{QA'}}) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi)$ d'ou φ est une rotation d'angle $(\frac{-\pi}{2})$ *de centre* Ω (car med[A'Q] ∩ med[PA']= $\{\Omega\}$ $\varphi = r_{(\Omega,\frac{-\pi}{2})}$

c/ $h = \varphi \, o \, S_{(A'Q)}$ h est un antidéplacement

$h(A') = \varphi \, o \, S_{(A'Q)}(A') = \varphi \ (A') = Q$

$h(P') = \varphi \, o \, S_{(A'Q)}(P) = \varphi \ (P) = A'$

h o h (P') =h (A') =Q

h o h ≠ id ⇒ h n'est pas une symétrie orthogonale

d'où h est une symétrie glissante ; soit $\vec{U}$ *son vecteur et* Δ *son axe*

$h \circ h = t_{2\vec{U}}$

$h \circ h(P') = Q \Rightarrow \vec{U} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P'Q}$ $\qquad \vec{U} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P'Q}$

Δ passe par Q*A'=I et P'*A'=K ⇒Δ=(I K)

3) $\begin{cases} \psi(A') = Q \\ \psi(P) = A' \end{cases}$

a/ $J = A' * P \Rightarrow \psi(J) = \psi(A') * \psi(P) \Rightarrow \psi(J) = Q * A' \Rightarrow \psi(J) = I$

b/ med $[A'Q] \neq med[PA']$ d'ou ψ n'est pas une symétrie orthogonale par suite ψ est une symétrie glissante .

c/ soit Δ son axe et $\vec{U}$ son vecteur

$\psi(A') = Q \Rightarrow I = A' * Q \in \Delta$

$\psi(P) = A' \Rightarrow J = P * A' \in \Delta$ D'où $\Delta = (IJ)$

$\psi = T_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}$ et $\psi(J) = I \Rightarrow T_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}(J) = I \Rightarrow T_{\vec{u}}(J) = I \Rightarrow \vec{U} = \overrightarrow{JI}$

4) $\psi(M) = M_1$ et $\varphi(M) = M_2$

$\varphi \circ \psi^{-1}(M_1) = \varphi \ (M) = M_2$

Caractérisons $\varphi \circ \psi^{-1}$

$\varphi \circ \psi^{-1}(Q) = \varphi \ (A') = Q$

$\varphi \circ \psi^{-1}(A') = \varphi \ (P) = A'$

$\varphi \circ \psi^{-1}$ est un antidéplacement qui fixe Q et A' d'ou $\varphi \circ \psi^{-1} = S_{(QA')}$

$\varphi \circ \psi^{-1}(M_1) = M_2 \Rightarrow S_{(QA')}(M_1) = M_2$ donc M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à la droite (QA')

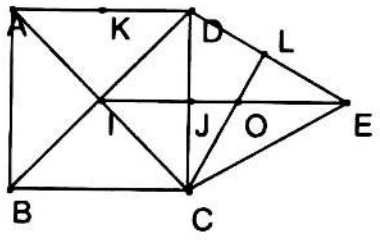
EX 25 :

1) $\varphi = r_{(D,\frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}$

a / $\varphi(c) = r_{(D,\frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}(c) = r_{(D,\frac{\pi}{3})}(D) = D$

$\varphi(D) = r_{(D,,\frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}(D) = r_{(D,,\frac{\pi}{3})}(c) = E$

b / φ est un antidéplacement (composé d'un déplacement et d'un antidéplacement)



DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

$\varphi o \varphi$ (c) $= \varphi$ (D) $=$E $\Rightarrow$ $\varphi o \varphi \neq$ id $\Rightarrow$ φ n'est pas une symétrie orthogonale

par suite φ est une symétrie glissante de vecteur $\vec{U} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$ et

d'axe Δ passant par C*D et D*E $\Rightarrow \Delta = (JL)$

2) a / $T_{\vec{AD}}$ o $S_{(AB)} = S_{(KI)}$ o $S_{(AB)}$o $S_{(AB)} = S_{(KI)}$

b / $\psi = T_{\vec{BD}}$ o $S_{(AB)} = T_{\vec{BA}+\vec{AD}}$ o $S_{(AB)}$

$\psi = T_{\vec{BA}}\ o\ T_{\vec{AD}}\ o\ S_{(AB)}$

$\psi = T_{\vec{BA}}\ o\ S_{(KI)}$ ψ est la symétrie glissante d'axe (KI) de vecteur $\overrightarrow{BA}$

3)

$$\left.\begin{array}{l} N_1 = r_{(D,\frac{\pi}{3})}(N) \\ N_2 = r_{(0,\frac{-2\pi}{3})}(N) \Rightarrow N = r_{(0,\frac{2\pi}{3})}(N_2) \end{array}\right\} \Rightarrow r_{(D,\frac{\pi}{3})}\ o\ r_{(0,\frac{2\pi}{3})}(N_2) = N_1$$

or

$r_{(D,\frac{\pi}{3})}\ o\ r_{(0,\frac{2\pi}{3})}$ *et une retation d'angle* $\pi \Rightarrow r_{(D,\frac{\pi}{3})}\ o\ r_{(0,\frac{2\pi}{3})}$ *est une symétrie centrale*

$$r_{(D,\frac{\pi}{3})}\ o\ r_{(0,\frac{2\pi}{3})}(D) = r_{(D,\frac{\pi}{3})}(C) = E$$

$$\Rightarrow r_{(D,\frac{\pi}{3})}\ o\ r_{(0,\frac{2\pi}{3})} = S_L$$

par suite $S_L(N_2) = N_1 \quad \Rightarrow L = N_1 * N_2$

4) $\varphi(M_n) = M_{n+1}$

a / Rappelons que :

$$\varphi = S_{(JL)}\ o\ T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}} = T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}}\ o\ S_{(IJ)}$$

$$\varphi o \varphi = T_{\vec{CE}} = T_{2\vec{JL}}$$

(Démonstration par récurrence)

Vérifions pour n =0

$\overrightarrow{MoMo} = (2x0)\overrightarrow{JL}$ *(vrai)*

Supposant que $\overrightarrow{MoM}_{2n} = (2n)\overrightarrow{JL}$

et montrons que

$$\overrightarrow{MoM}_{2(n+1)} = 2(n+1)\overrightarrow{JL}$$

$$\overrightarrow{MoM}_{2n+2} = \overrightarrow{MoM}_{2n} + \overrightarrow{M_{2n}M}_{2n+2}$$

$$= (2n)\overrightarrow{JL} + 2\overrightarrow{JL}$$

$$= (2n+2)\overrightarrow{JL}$$

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

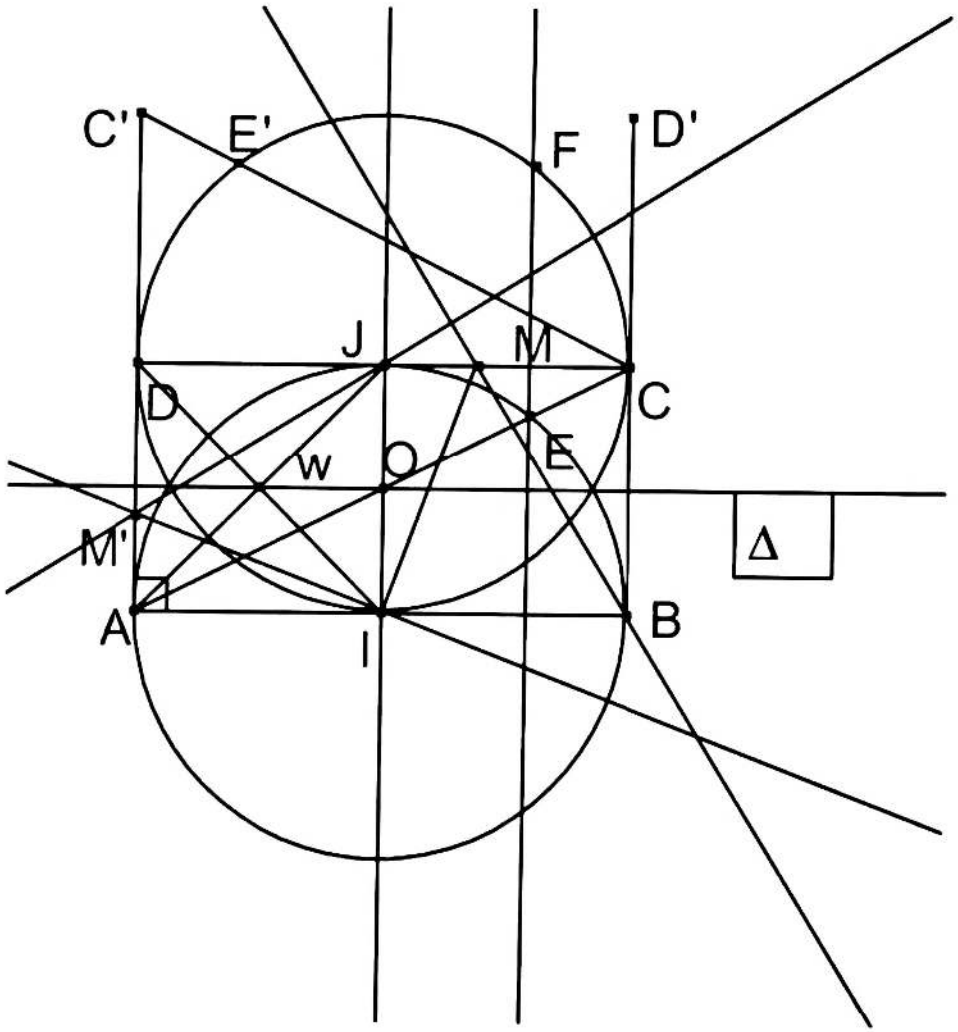
$M_{2n+2} = \varphi \circ \varphi (M_{2n})$

en effet : $\Rightarrow \overrightarrow{M_{2n} M_{2n+2}} = 2\overrightarrow{JL}$ Conclusion : $\overrightarrow{MoM}_{2n} = (2n).\overrightarrow{JL} \quad \forall n \in IN$

b / $\overrightarrow{MoM}_{2n} = (2n)\overrightarrow{JL} \Rightarrow (MoM_{2n}) // (JL)$

$\Rightarrow M_{2n}$ Appartient à la droite passant par Mo et parallèle à la droite (JL).

EX 26 :



1)

a) AI=CJ et AI≠0 d'où il existe un unique déplacement f tel que $\begin{cases} f(A) = C \\ f(I) = J \end{cases}$

b) f est d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CJ}}) \equiv \pi(2\pi)$ ⇒ f est une rotation d'angle π ⇒ f est une symétrie centrale

f(A)=C ⇒ f=S_O avec O=A * C donc f(B)=S_O(B)=D

2) $f = S_{(IJ)} \circ S_\Delta \Leftrightarrow S_{(IJ)} \circ S_\Delta = S_O \Rightarrow \Delta$ la perpendiculaire à (IJ) en O⇒ Δ=med[AD]

3) $r = r_{(I,\frac{\pi}{2})}$

a) r(B)=J
r(C)=D
r(J)=A

b)l'image de la droite (BM) par r est la droite passant par r(B)=J et qui lui est perpendiculaire (car r est d'angle $\frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow$r((BM))=(JM') De même r((IM))=(IM')

D'où r(M)=M'

M$\in$[CJ] $\Leftrightarrow$ M'$\in$r([CJ]) $\Leftrightarrow$ M'$\in$[DA]

4) $g = r \circ f = r_{(I,\frac{\pi}{2})} \circ S_O$

a) $g = r_{(I,\frac{\pi}{2})} \circ r_{(O,\pi)}$ g est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$. g est d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b) $g(A) = r \circ S_O(A) = r(C) = D$

c) soit ω le centre de g

$$g(A) = D \Leftrightarrow \begin{cases} \omega A = \omega D \\ (\widehat{\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega D}}) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi) \end{cases} \quad \Rightarrow \omega \text{ : le centre du carré AIJD}$$

5) a) AI=CJ et AI$\neq$0 D'où....

b) med[AC]$\neq$med[IJ] donc h n'est pas une symétrie orthogonale $\Rightarrow$h est une symétrie glissante

c) I=A * B $\Rightarrow$ h(I)=h(A) * h(B) $\Rightarrow$ J=C * h(B) $\Rightarrow$ h(B)=S_J(C)=D

6) a/<u>1ére méthode</u>:

$h \circ S_{(AB)}(A) = h(A) = C$

$h \circ S_{(AB)}(B) = h(B) = D$

$h \circ S_{(AB)}$ est un déplacement d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv \pi(2\pi)$

$h \circ S_{(AB)}$: symétrie centrale de centre A * C =O

$h \circ S_{(AB)}$=S_O=f

b) $h \circ S_{(AB)}$=S_O $\Rightarrow$ $h \circ S_{(AB)} = S_{(IJ)} \circ S_{(O\omega)} \Rightarrow h = S_{(IJ)} \circ (S_{(O\omega)} \circ S_{(AB)})$

$\Rightarrow h = S_{(IJ)} \circ t_{2\overrightarrow{IO}}$

h: symétrie glissante d'axe (IJ) de vecteur $\overrightarrow{IJ}$

a) <u>2éme méthode</u> :

$$\left.\begin{matrix} h(A) = C \\ h(D) = D' \end{matrix}\right) \Rightarrow CD' = AD = BC \qquad (1)$$

D'=h(D)

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$ car un antidéplacement change les mesures des Angles orientées en leurs opposées

$$(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) + (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CD'}})(2\pi)$$
$$\equiv \frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(2\pi) \equiv \pi(2\pi) \quad (2)$$

(1)+(2) $\Rightarrow \quad \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD'} \Rightarrow$ C=B* D' $\Rightarrow$D'=S_C (B)

b) 2 éme methode : h(B)=D et h(D)=D'

$h \circ h(B) = D'$ or $h \circ h = t_{2\vec{u}}$

$\Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{BD'} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IJ}$

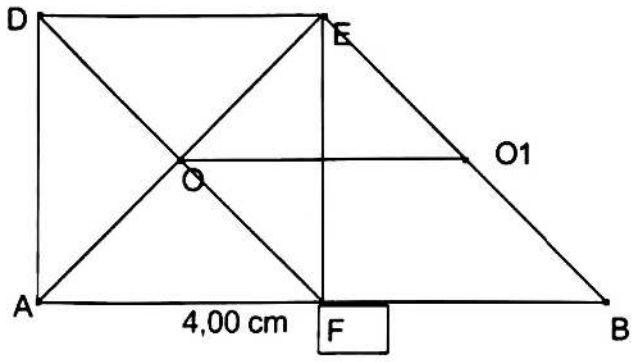
Δ passe par B* D=O et Δ//(IJ) $\Rightarrow \quad \Delta$=(IJ)

c) $h \circ h(A) = h(C) = C' \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BD'} \Rightarrow C' = S_D(A)$

7) on a : h(E)=E' car h(ζ)=ζ' et h([AC])=[CC']

$$F = S_{(IJ)}(E')$$
$$\Rightarrow F = S_{(IJ)} o h(E)$$
$$\Rightarrow F = \circ S_{(IJ)} \circ S_{(IJ)} o t_{\vec{IJ}}(E)$$
$$\Rightarrow F = t_{\vec{IJ}}(E)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IJ} \Rightarrow (EF) // (AD)$$

EX 27 :



1) a) r(F)=E r(E)=D

$$\left.\begin{array}{l}(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{ED}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \\ med[FE] \cap med[ED] = \{O\}\end{array}\right\} \text{ D'où } r = r_{(O,\frac{\pi}{2})}$$

b) $f = r \circ S_{(OO_1)}$ $\quad f(O) = r \circ S_{(OO_1)}(O) = r(O) = O$

$\quad f(E) = r \circ S_{(OO_1)}(E) = r(F) = E$

f est un antidéplacement (composé d'un déplacement et un antidéplacement) qui fixe deux points distincts O et E d'où $f=S_{(OE)}$

2) $r' = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1} = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r_{(O,\frac{\pi}{2})}$

a) comme étant composée d'une translation et d'une rotation d'angle $(\frac{-\pi}{2})$,

r' est une rotation d'angle $(\frac{-\pi}{2})$

b) $r'(O) = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1}(O) = t_{\overrightarrow{OO_1}}(O) = O_1$

on a : $\begin{cases} FO = FO_1 \\ (\widehat{\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{FO_1}}) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ d'où r est de centre F donc $r' = r_{(F,\frac{-\pi}{2})}$

3) g(D)=F et $g(O)=O_1$

a) * $med[DF] \neq med[OO_1]$ d'où g n'est pas une symétrie orthogonale, par suite g est une symétrie glissante

* soit Δ son axe et $\vec{u}$ son vecteur

$g(D)=F \Rightarrow D * F=O \in \Delta$

$g(O)=O_1 \Rightarrow O * O_1 \in \Delta$ d'où $\Delta=(OO_1)$

$$g(O) = O_1 \Leftrightarrow t_{\vec{u}} \circ S_{(OO_1)}(O) = O_1 \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(O) = O_1 \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{OO_1}$$

d'où : $g=t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ S_{(OO_1)} = S_{(OO_1)} \circ t_{\overrightarrow{OO_1}}$

b) $g(M)=r'(M) \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ S_{(OO_1)}(M) = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1}(M)$

$\Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OO_1}}(S_{(OO_1)}(M)) = t_{\overrightarrow{OO_1}}(r^{-1}(M))$

$\Leftrightarrow S_{(OO_1)}(M) = r^{-1}(M)$

$\Leftrightarrow r(S_{(OO_1)}(M)) = M$

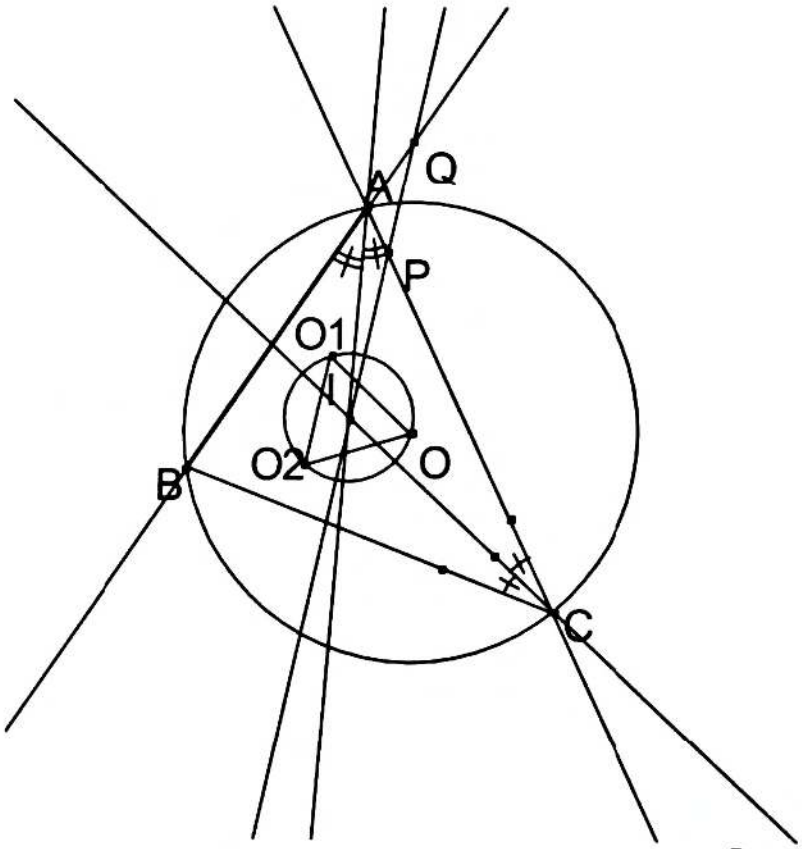
$\Leftrightarrow r \circ S_{(OO_1)}(M) = M$

$\Leftrightarrow f(M) = M$

c) $g(M) = r'(M) \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow S_{(OE)}(M) = M \Leftrightarrow M \in (OE)$

DEPLACEMENT-ANTIDELACEMENT CH3 TOME 2

EX 28 :



1) a) le triangle BCP est isocèle en C et [CI) : bissectrice de $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BP}\right]$ D'où (CI)=med[BP]

De même (BI)=med[CQ]

b) $(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}})(2\pi) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) + \pi(2\pi) \equiv \frac{-\pi}{3} + \pi(2\pi) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

2) f(C)=Q F(P)=B

a) $(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$ et $med[CQ] \cap med[PB] = \{I\}$ D'où $f = r_{(I,\frac{2\pi}{3})}$

b) $f(P) = B \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

le triangle CPB est isocèle en C et direct et (CI)=med[BP]

L'image de $\left[\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}\right]$ par $S_{(CI)}$ est $\left[\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IC}\right]$ D'où $\widehat{BIC} = \widehat{PIC}$

$\Rightarrow \widehat{PIB} + 2\widehat{BIC} = 2\pi \Rightarrow 2\widehat{BIC} = 2\pi - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \widehat{BIC} = \frac{2\pi}{3}$ Par suite $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

c) f(C)=Q $\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IQ}}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$ et comme (BI)= med[CQ] D'où $(\widehat{\overrightarrow{IQ},\overrightarrow{IB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

$(\widehat{\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IQ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IB}}) + (\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IQ}})(2\pi) \equiv \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}(2\pi) \equiv 0(2\pi)$

d'où $\overrightarrow{IP}$ et $\overrightarrow{IQ}$ sont colinéaires par suite I,P et Q sont alignés

3) $O_1=f(O)$; $O_2=f(O_1)$

a) $f=r_{(I,\frac{2\pi}{3})}$ $f\circ f=r_{(I,\frac{4\pi}{3})}$ et $f\circ f\circ f=r_{(I,2\pi)}=id_P \Rightarrow f\circ f\circ f(O)=O \Rightarrow f\circ f(O_1)=O \Rightarrow f(O_2)=O$

b)

$$\begin{cases} f(O)=O_1 \\ f(O_1)=O_2 \end{cases} \Rightarrow OO_1=O_1O_2$$

$$\begin{cases} f(O_1)=O_2 \\ f(O_2)=O \end{cases} \Rightarrow O_1O_2=OO_2$$

D'où $OO_1=O_1O_2=OO_2$ par suite le triangle OO_1O_2 est équilatéral

* $f(O_1)=O_2 \Rightarrow IO_1=IO_2$ or $OO_1=OO_2$ D'où $(OI)=med[O_1O_2]$

4) $r=r_{(O,\frac{2\pi}{3})}$ $g=f\circ r\circ f$

a) $g=r_{(I,\frac{2\pi}{3})}\circ r_{(O,\frac{2\pi}{3})}\circ r_{(I,\frac{2\pi}{3})}$

$r_{(I,\frac{2\pi}{3})}\circ r_{(O,\frac{2\pi}{3})}$ est une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$ $(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\neq 0(2\pi))$

$\frac{4\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\equiv 0(2\pi)$ d'où g est une translation

$g(O_2)=f\circ r\circ f(O_2)=f\circ r(O)=f(O)=O_1$

* d'où $g=t_{\overrightarrow{O_2O_1}}$

b) O : le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

d'où $\begin{cases} OB=OC \\ et \\ (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})\equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OB=OC \\ (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})\equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow r(B)=C$

* $g(P)=f\circ r\circ f(P)=f\circ r(B)=f(C)=Q$

c) $g=t_{\overrightarrow{O_2O_1}}$

$g(P)=Q \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{O_2O_1}$

d'où $(PQ)//(O_1O_2)$

or $(OI)\perp(O_1O_2)$ car $(OI)=med[O_1O_2]$

d'où $(PQ)//(OI)$